

Devoir de contrôle n° 1 en mathématiques**Q.C.M : (3 points)**

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse est correcte. (Aucune justification n'est demandée)

1) Soit la fonction :  $f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$

a/  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$   1  0  n'existe pas

b/  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$   1  0   $+\infty$

2) Soit la suite  $(u_n)$  définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = n \cdot \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$

$(u_n)$  est convergente   $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$    $(u_n)$  n'a pas de limite en  $+\infty$

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct,

on donne les points A, B et C d'affixes respectives  $Z_A = 2 - i$ ,  $Z_B = 2 + i$  et  $Z_C = -2 + i$ ,

alors l'ensemble des points M du plan d'affixe Z vérifiant  $|\bar{Z} - 2 + i| = 3$  est un cercle de rayon 3 et de centre

A  B  C

**Exercice n°1 : (6,5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -\infty, 4[$  par  $f(x) = \frac{3}{4-x}$

Soient les suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}, n \geq 0$  et  $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}, n \geq 0$

Dans l'annexe, on a tracé la courbe de  $f$  dans un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , ainsi que la droite  $\Delta : y = x$

On a placé les termes  $v_0, v_1$  et  $v_2$  sur l'axe des abscisses.

1) a/ Déduire du graphique les variations de  $f$  sur  $] -\infty, 4[$

b/ Placer sur l'axe des abscisses les termes  $u_0, u_1$  et  $u_2$  en utilisant la courbe de  $f$  et la droite  $\Delta$ .

c/ Que peut-on conjecturer sur la convergence de  $(U_n)$  et  $(V_n)$ .

2) a/ Montrer que la suite  $(U_n)$  est croissante et que  $u_n \leq 1$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

b/ Montrer que la suite  $(V_n)$  est décroissante et que  $v_n \geq 1$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

c/ En déduire que  $u_n \leq v_n$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ .

3) a/ Montrer que  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3(v_n - u_n)}{(4 - v_n)(4 - u_n)}$

b/ En justifiant que  $(4 - v_n)(4 - u_n) \geq 6$ , Montrer que  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$

c/ Montrer par récurrence que  $v_n - u_n \leq 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$

d/ Calculer alors la limite de  $(v_n - u_n)$  lorsque  $n$  tend vers  $(+\infty)$ .

Que peut-on dire des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  ?

e/ Déduire que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent vers la même limite  $\ell$  que l'on déterminera.



### Exercice n°2 : (5,5 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère les points A et B d'affixes respectifs  $Z_A = \sqrt{3} + i$  et  $Z_B = -1 + i\sqrt{3}$ .

- 1) a) Ecrire sous forme exponentielle  $Z_A$  et  $Z_B$ .
  - b) Placer les points A et B dans le repère.
  - c) Ecrire  $\frac{Z_B}{Z_A}$  sous forme exponentielle.
  - d) Dédire que OAB est un triangle rectangle et isocèle en O.
  - e) Déterminer l'affixe du point C pour que le quadrilatère OACB soit un carré.
- 2) Soit un point M d'affixe  $Z_M = 1 + e^{2i\theta}$  où  $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}[$ .
- a) Montrer que  $Z_M = 2 \cos \theta e^{i\theta}$  puis vérifier que c'est son écriture sous forme exponentielle.
  - b) Déterminer la valeur de  $\theta$  pour que M appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.
  - c) Déterminer la valeur de  $\theta$  pour que les points O, A et M soient alignés.

### Exercice n°3 : (5 points)

Soit la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}+2x}{x^2+1} & \text{si } x > 0 \\ x^3+2x+1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- 1) a) Montrer que pour tout  $x \in [0, +\infty[ : 0 \leq f(x) \leq \frac{3x+1}{x^2+1}$

(Indication : Comparer  $\sqrt{a+b}$  et  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$  pour a et b deux réels positifs)

b) Dédire  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

2) Etudier la continuité de f en 0.

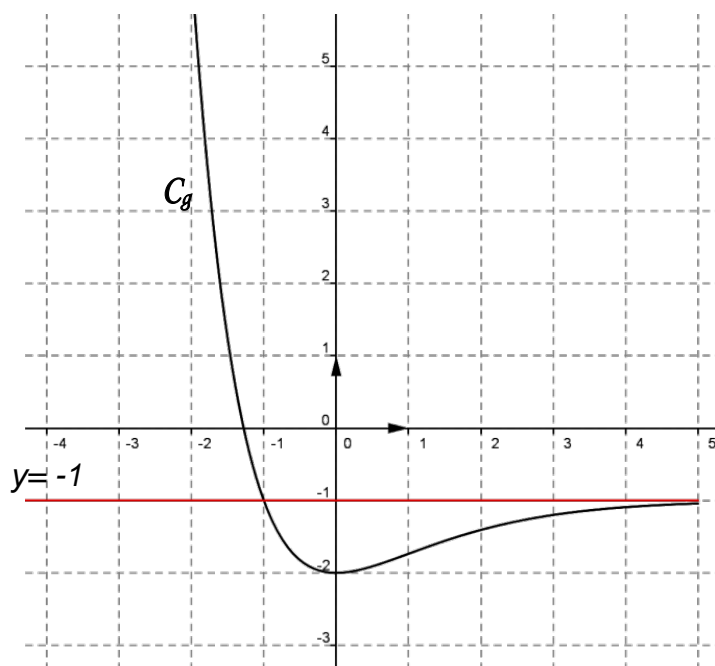
3) a) Etudier les variations de f sur  $]-\infty, 0]$ .

b) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]-\infty, 0]$  une unique solution  $\alpha$  puis vérifier que  $-0,5 \leq \alpha \leq -0,4$ .

4) La courbe  $C_g$  ci dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie sur  $\mathbb{R}$ .

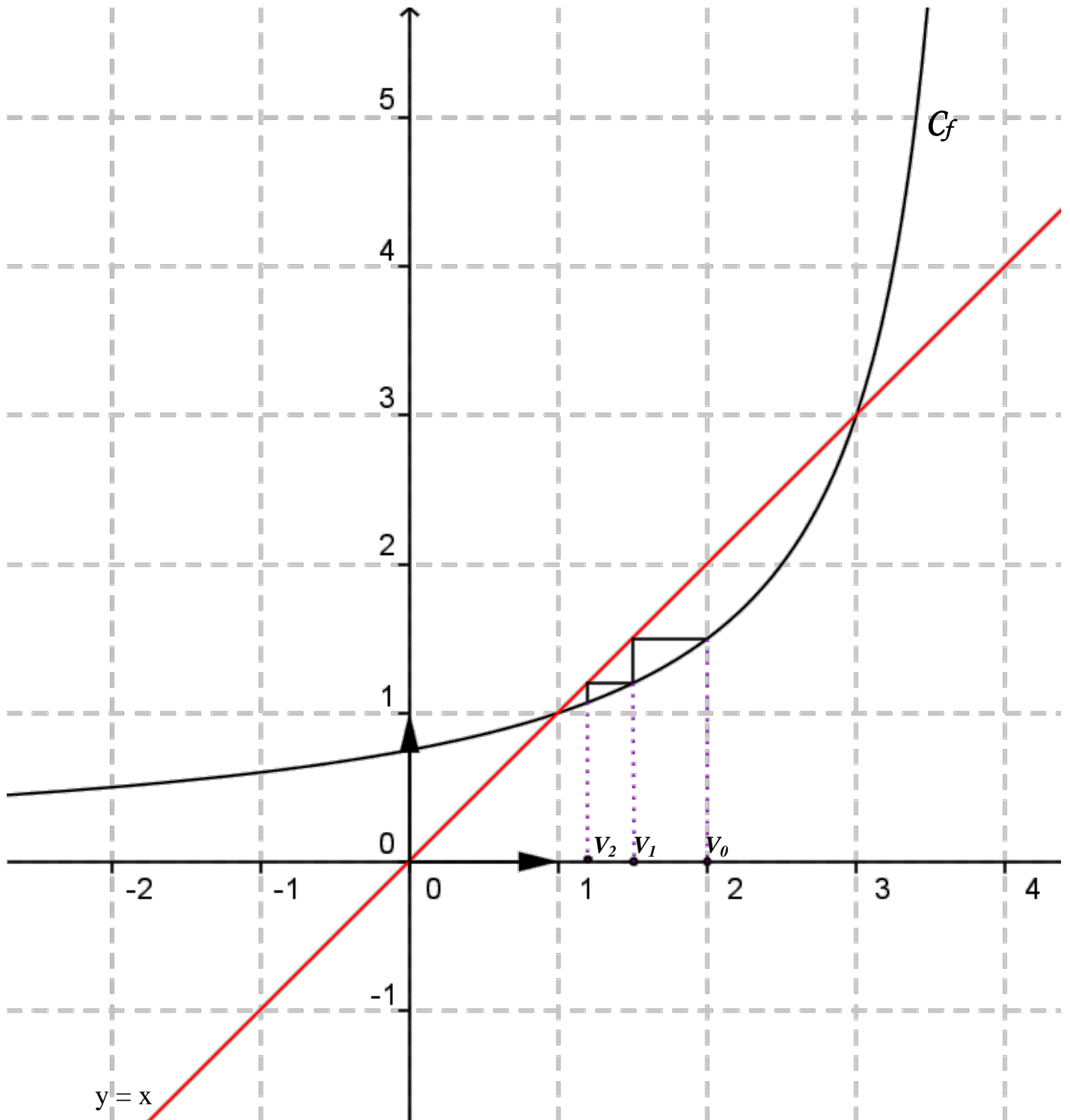
$C_g$  admet la droite D :  $y = -1$  comme asymptote horizontale au voisinage de  $(+\infty)$

Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g \circ f(x)$        $\lim_{x \rightarrow -\infty} f \circ g(x)$        $\lim_{x \rightarrow +\infty} f \circ g(x)$



# Annexe

Nom & Prénom : .....



Bon travail et bonne chance

